数学史

智力玩具九连环研究

沈康身

(浙江大学 数学系，浙江 杭州 310027)

摘　要　经考证指出中国智力玩具九连环在先秦时代已经发明;探讨九连环的结构、操作特点、源流、上下环充分必要条件及其计数函数;介绍西方数学家 Cardan G (1501－1576)，Wallis J(1616－1703) 和 Lucas F E A(1842－1891) 所取得的相关成果.

关键词　九连环;上、下环充要条件;计数函数

中图分类号　O112　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2012)05-0056-08

北京中国科技馆古典数学玩具展灯火辉煌. 展览会在第24届世界数学家大会2002年在北京召开期间举办，展品有九连环、华容道、鲁班锁等等，琳琅满目. 展览会自8月19日至27日，会期9天，参观人数最多一天在万人以上. 有的学生一连两三天呆在这里，全国数学竞赛夏令营的学生在这里深受教益. 这次展览盛况空前，影响很大. 北京电视台为此报道说："世界数学家大会给京城掀起了数学热，而北京玩具展又趁热着实烧了一把火. 这个展览会规模不大，但是气韵不凡，是炎炎夏日从北方吹来的一阵清风，是在暑假里送给青少年的一份真情，是代表北京献给世界数学家一份特殊的礼物."

中国科技馆馆长王渝生博士在接受记者采访时说："中国为世界数学发展做出了巨大的贡献，中国古老的智力玩具就是见证. 九连环、华容道、鲁班锁等玩具涉及数学中的几何学、拓扑学、运筹学、组合数学、图论等多门学科."

上届数学家大会主席道本周(Dauben J) 教授在开展前就来展览会认真参观，他说："这是给本届大会较好的礼物，这个展览会把数学家和人们的距离拉近了，高深莫测的数学通过小小的玩具，展示了它的奥秘，让孩子们在玩具中感悟数学原理，在游戏中享受数学的乐趣和美妙，从而引发他(她) 们探索数学的兴味和勇气."

本届大会主席吴文俊院士在27日兴致勃勃地参观展览，详细询问各种玩具体现的玩法和数学原理. 对九连环等玩具表示极大兴趣. 他连声说："太有意思了，高深的数学在这里变得如此简单有趣，太奇妙了!" 他还说："有人说，数学枯燥，其实数学并不枯燥，它是生动的、形象的、丰富多彩的. 我们的祖先把玩具和数学结合起来，创造出数学玩具. 使玩具有了数学的文化底蕴，使数学有了玩具的形象载体：珠联璧合，相得益彰，真是太好了!"

玩具展的盛况已成历史，但是人们对此还深深回味着，本文对展品中的九连环有关细节作详细论述，它有异于华容道等板状玩具，在结构和操作方法上都有特色. 九连环已有悠久的历史，流传地域甚广，由于它富含数学、逻辑学、运筹学、机构学等原理，玩九连环又有益身心健康，所以至今仍具有强大生命力. 数百年前又经丝绸之路在铿锵驼铃声中远及欧洲，迭经数学大师 Cardan G(1501－1576，意大利)、Wallis J(1616－1703，英国)、Lucas F E A(1842－1891，法国)，Coxeter H S M(1907－2003，加拿大) 等研究，其名大噪，九连环的奥秘还有待我们进一步探索.

1　构造和操作

1.1　构造

图1已从两个视线方向正确表示九连环的构造细节. 九个圆环，每环都套有等长竖杆，竖杆上端有圆扣，扣住圆环，环可以在扣内滑动. 竖杆下端伸入长方形板孔内后，也弯成扣，或用球状物扣牢，使竖杆可以在孔内作上下滑动，但不可脱出长板. 每个圆环的竖杆都插入相邻环内. 玩(操作) 九连环的目的是要把九个圆环如图1位置关系都套在长钗内，称为上环，其逆向操作称为下环.

圆环及长方形板用金属或塑料制，竖杆、长钗用金属制，都应有足够强度，使在操作中不致变形.

九连环各地玩具店都有出售，从网上也可以购得，网址：http://www.shangnaojin.com.

收稿日期：2010-03-07；修改日期：2012-07-09

编者按：沈康身教授(1923－2009) 是我国著名数学史家. 此文写于2003年. 内蒙古师大罗见今教授针对遗稿，补英文提要并按出版要求编辑，请冯呈硕士打印电子文档，使此文按作者遗愿今与读者见面. 谨以之悼念沈康身先生逝世三周年.

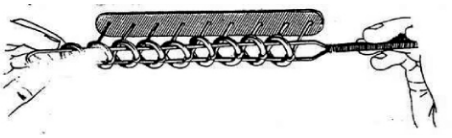
九连环自制并不难,四种零件参考尺寸如下(单位:mm).

圆环:$\varnothing$35,粗 2,可买现成窗帘环代用.

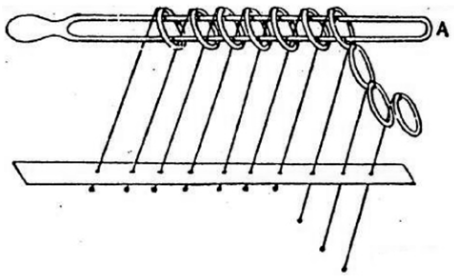
竖杆:长 120,粗 2,上圆扣 $\varnothing$15,下圆扣自定.

长方板:长 180,宽 20,厚 3. 九孔 2.5 孔距 20.

长钗:长 220,宽 30,粗 2.5,柄长 100.



(a)　俯视图



(b)　主视图

图 1　九连环

1.2　操作

左手持柄,钗头 A 在右,九个环自右而左地论环序:环 1,环 2,…… 至环 9. 长钗、圆环、长方板及竖杆间位置如图 1,2 时,称为满贯. 从满贯位置从环 1 开始,以序逐一卸下长钗,当所有九个圆环全部与长钗分离时,称为解脱.

九连环机构构造具有许多特殊性质.

环 1 可以右移、提起、上经钗头 A 在长钗套之间自由落下,挂在环 2 上,称为下环 1,或简称下一.

环 1 与环 2 作为整体可以同时右移,提起,经钗头 A,自由在钗套间落下,挂在环 3 上,称为下环 1、2,或简称下一、二.

环 3 直至环 9,只能在前面一环还在钗上,前面其他所有环全部卸下,才能卸下或装上,这就是说,环 $n(n \geqslant 3)$ 能够卸下或装上的充分必要条件是环 $n-1$ 在钗上且环 1 至环 $n-2$ 已全部卸下,挂在环 $n-1$ 上.

除了环 1、环 2 可以自由卸下、装上之外,其余七个环只能按此条件操作,否则自动锁住,真是寸步难行. 这也是九连环设计思想精彩之处.

所谓卸下某一环,不妨设环 $m(3 \leqslant m \leqslant 9)$,的操作为:将待卸环 m,连同在钗上的环 $m-1$ 以及挂在此环下的 $m-2$ 个环一起向右移,然后提起环 m,绕过钗端 A,即可自由下落挂在环 $m-1$ 上.

所谓装上某一环,不妨设环 $m(3 \leqslant m \leqslant 9)$,的操作为:提起要装上的环 m,连同在钗上的环 $m-1$ 以及挂在此环下的 $m-2$ 个环一起向右移,然后经过钗头 A,套在钗上,所有 m 个环再左移.

从长钗每装上(或卸下)一个圆环,称为操作 1 步. 因此要从长钗卸下环 1 要操作 1 步. 要卸下环 1、2,从九连环机构特性,只须操作 1 步;而按照西方文献记载,计数则为 2 步. 下文把计数计算方法分别列出,前者称为“机构计数”,后者称为“按环计数”. 下文步数计算结果都用“机构计数”,而在它后面括弧内记出相应的“按环计数”.

卸下环 1 至环 3 的全过程如下(图 3a 为初始状态).

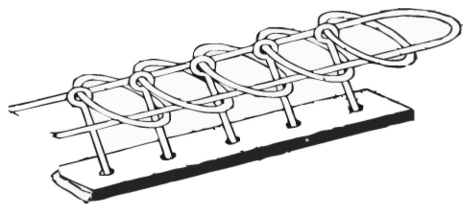
下一:使环 1 挂在环 2 上,操作 1 步(图 3b).

下三:环 3 连同环 1、2 向右移,环 3 经环头 A 向上提起,落入钗套内,挂在环 4 上,操作 1 步(图 3c 为操作结果).

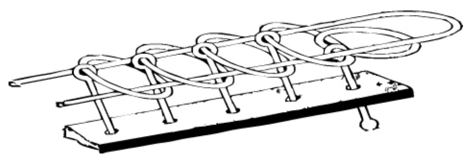
上一:操作 1 步.

下一、二:操作 1(2) 步.

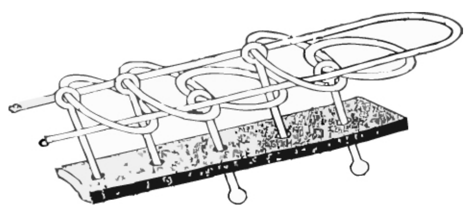
全过程共操作 4(5) 步.



(a)　三联环满贯状态



(b)　使环 1 挂在环 2 上



(c)　卸下环 3

图 2　卸下环 1 至环 3 的过程

反过来,把已卸下的环 1 至环 3 全部装到钗上是上述操作的逆运算,读者可自琢磨,不赘述. 装上操作步数显然与卸下步数相同.

2　国内外流传

2.1　源流

九连环肇源甚古,文献记载可以上溯到战国时代.《战国策·齐策·齐闵王之遇杀》记,“襄王卒,子建立为齐王. 君王后事秦、谨,与诸侯信. 秦昭王尝使使者遗君王后玉连环,曰:‘齐多知,而解此环不?君

王后以示群臣,群臣不知解,君王后引铁椎破之谢秦使,曰:谨以解矣!'”故事具体指出,我国在二千多年前已有连环玩具,圆环用玉制.从“群臣不知解”,可见解环并不是一件容易的事.

之后在漫长的岁月中,九连环代代相传.直至11世纪,还可以看到北宋文学家周邦彦(1056—1121)在词中记到“怨怀无托,嗟情人断绝,信者辽邈.信手,能解连环.”(解连环·商调)

明代正德状元杨慎(1448—1559)著《升庵集》,全书81卷,后来收入《四库全书·子部》.其中卷68有他对《战国策》的书评(图3),为我们提供九连环的珍贵史料:明代连环已改玉环为铜铁制环,又指出,玩九连环的目的,以及当时已流入民间实况,据此他认为:齐君王后能力服强秦,必能解玉连环.

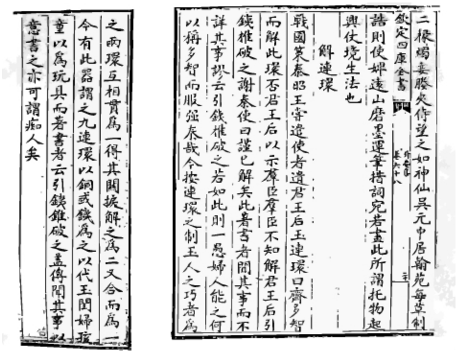

二根蝎妾滕夾侍望之如神仙吳元中居翰苑每草制
欽定四庫全書 卷六十八
誥則使婢遠山磨墨運筆措詞究若盡此所謂托物起
興使境生法也
解連環
戰國策秦昭王嘗遣使者遺君王后玉連環曰齊多智
而解此環否君王后以示羣臣羣臣不知解君王后引
鎚椎破之謝秦使曰謹已解矣此著書者聞其事而不
詳其事妙云引鎚椎破之若如此則一愚婦人能之何
以稱多智而服强秦哉今按連環之制玉人之巧者為
之兩環互相貫為一得其關捩解之為二又合而為一
今有此器謂之九連環以銅或鐵為之以代玉閨婦孩
童以為玩具而著書者云引鎚椎破之蓋傳聞其事以
意書之亦可謂痴人矣

图3 《升庵集》卷68书影

《中州·艺文志》卷八记:“柘城李子金(1622—1708)是明末清初时人,可见当时已有学者对九连环有系统研究,并为之著书立说.”

清人曹雪芹名著《红楼梦》第七回,九连环也进入大观园(图4).

近人徐珂著有大型笔记《清稗类钞》92卷,从古今文献录条目13500余则.其中物品类,赫然有九连环专条:“九连环,玩具也.以铜制之.欲使九环同贯于柱上,则先上第一环,再上第二环,而下去第一环.更上第三环,而下其第一、二环,再上第四环.如实更迭上下,凡八十一次,而九环毕上矣.

解之之法:先下其第一环,次下其第三环更上第一环,而并下其第一、二环.又下其第三环,如是更迭上下,凡八十一次,而九环毕下矣.”

这是今存最早记述九连环上、下环运行具体程序的文献.从此可以看到我国传统是按九连环机构性质操作:把环1、2并作1步,不论上或下环都是:“并下其第一、二环.”

在上世纪40年代许莼舫、姜长英有关专著中都有九连环记载,可惜都未详究操作细节.建国后书刊偶有报导,如《十万个为什么·数学》,《趣味数学辞典》,但都未有深究者.今年杨之在《数学发现的艺术》,操敏在《九连环解法》(网上资料)都指出了上下环的充分必要条件.

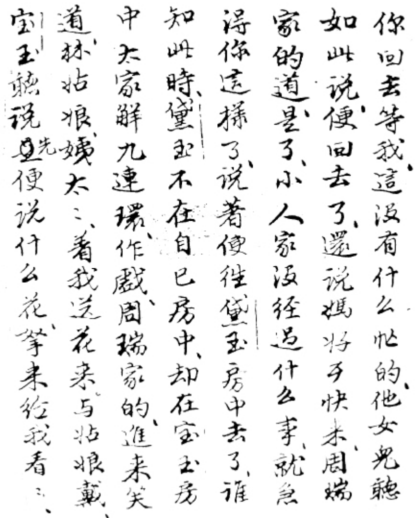

你回去等我,這沒有什么忙的,他女兒聽
如此說,便回去了,還說媽將子快來周端
家的道:是了,小人家沒经過什么事,就急
得你這樣了,說着便往黛玉房中去了,誰
知此時,黛玉不在自已房中,却在寶玉房
中,大家解九連環作戲,周瑞家的進來笑
道:林姑娘,姨太太着我送花來与姑娘戴,
寶玉聽說,先便說什么花,拿來給我看看

图4 《红楼梦》抄本书影

2.2 九连环流传地域甚广

(1)在国内的流传情况

英国李约瑟博士在《中国文化与科学》巨著卷3第111页中有精确九连环图(图1即引自此页).他说,是按照Brian Harland先生在兰州购得实物绘制.笔者友人徐学功,在沈阳长大.他说在幼时,他父亲(钳工)仿照九连环成品自制,陪他玩此玩具.姜长英在《科学消遣》中说,1917年,在河北保定的府马号商场买到九连环.这种传统制造手艺还流传至今,2002年杭州西湖博览会期间,笔者购得保定市新县出品一件.又据河南柘城县李继光提供材料:“当年李子金所撰《解双谱》是研究九连环的设计与解法.此书还附有计算,是一部融智能、游戏于一体的读物.此书李子金后代一直保存到1973年,被人借走,至今仍未追回.”可见,在明末清初时,九连环风靡中原,引起数学家重视,把解环程序像奏琴、下棋有琴谱、棋谱那样,总结为《解环谱》.可惜此书久佚.江南,杭州宋城以及历届西湖博览会都有九连环出售.兰溪市诸葛村至今把九连环作为旅游商品出售.笔者在上世纪五十年代在嘉兴中学当教师时,有一位学生把家藏九连环要求讲明其中数学原理.回忆此件形如一大串钥匙,构件分别由紫、黄、白铜精制,有好几斤重.据《智力》2002年连载12期待“九连环传奇”介绍,在广东有九宫寨,盛行九连环活动,还举行上、下环竞赛,解环纪录为3分58秒.

(2)在国外的流传情况

17世纪以前九连环已传入日本.日本学士院编巨著五卷本《明治前日本数学史》记:“学士院藏有

《关(孝和)流算术传书》五卷抄本,卷 2 有九连环术.”虽然语焉不详,可以想见,当时日本学者对之研究,且有著述.

已很难考证九连环传到欧洲的确切时间,但是欧洲学者在 16 世纪以来,为之已发表论著多篇,很有见地,并称之为 Chinese rings 或 Chinese puzzle 却是事实.在这些论著中有共同特点:上下环操作时是在满足充要条件前提下所作各种数学考虑.这种充要条件的叙述在我国现存典籍中却已失落.真有“礼失而求诸野”的感觉.但是我们祖先是熟知这种条件的(《清稗类钞》所录操作步骤符合此条件).正如上文所说,否则在操作时将寸步难行,九连环就不可能流传至今了.图 5 为 18 世纪时意大利威尼斯流行的九连环书影.

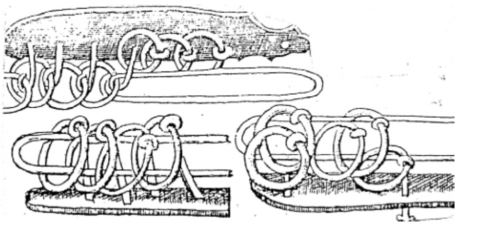
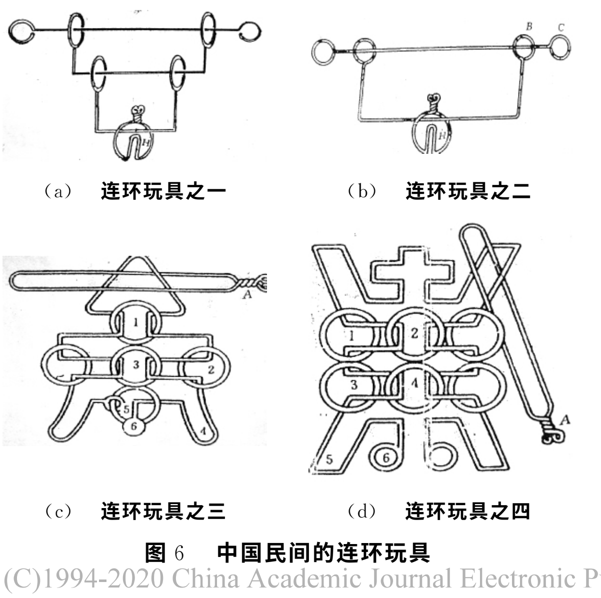


图 5　威尼斯 18 世纪流行的九连环

2.3　推广与创新

九连环传到欧洲后,西方学者认为连环机构不限于 9 个,少于 9 个或多于 9 个,连环同样可以满贯或者解脱.当然随之而来出现变化,特别在步数计数上,导致在一般情况的计数函数.

我国民间还出现过许多形式的连环玩具,真是千姿百态,美不胜收.在中国科技馆古典数学玩具展中,就辟有一个大厅,展示这些连环玩具.图 6 只是其中一小部分.这些连环玩具都各有名称,各自有独特的满贯和解脱规律,这里不一一细表了.



(a)　连环玩具之一　　(b)　连环玩具之二

(c)　连环玩具之三　　(d)　连环玩具之四

图 6　中国民间的连环玩具

3　《解环谱》与操作计数

3.1　《解环谱》复原设想

明末清初李子金《解环谱》手抄本丢失至今已整整 30 年了.根据九连环机构特性、解环充要条件和《清稗类钞》所示前人解环部分口诀笔记,《解环谱》可以复原、再现.按照操作时步的定义,在解环过程中还可以明确计数:由一个环、二个环直到九个环组成的连环,从满贯状态到解脱所需要的操作步数,而且还可以扩充到由 n 个环组成的 n 连环解环所需要的步数与 n 的关系——连环计数函数.在下文《解环谱》中口诀后用阿拉伯数字标记的是“机构计数”,括弧内记出相应的“按环计数”.

《解环谱》中的口诀如下.

一环:下一,1.操作 1 步.

二连环:下一、二,1(2).操作 1(2) 步.

三连环:下一,1.下三,1.上一,1.下一、二,1(2).共操作 4(5) 步.

四连环:下一、二,1(2).下四,1.上一、二,1(2).下 1,1.下三,1.上一,1.下一、二,1(2).共操作 7(10) 步.

五连环:下一、二、三,4(5).下五,1.上一、二、三,4(5).下一、二,1(2).下四,1.上一、二,1(2).下一,1.下三,1.上一,1.下一、二,1(2).共操作 16(21) 步.

六连环:下一至四,7(10).下六,1.上一至四,7(10).下一、二、三,4(5).下五,1.上一、二、三,4(5).下一、二,1(2).共操作 31(42) 步.

七连环:下一至五,16(21).下七,1.上一至五,16(21).下一至四,7(10).下六,1.上一至四,7(10).下一、二、三,4(5).下五,1.上一、二、三,4(5).下一、二,1(2).下四,1.上一、二,1(2).下一,1.下三,1.上一,1.下一、二,1(2).共操作 64(85) 步.

八连环:下一至六,31(42).下八,1.上一至六,31(42).下一至五,16(21).下七,1.上一至五,16(21).下一至四,7(10).下六,1.上一至四,7(10).下一至三,4(5).下五,1.上一至三,4(5).下一、二,1(2).下四,1.上一、二,1(2).共操作 127(170) 步.

九连环:下一至七,64(85).下九,1.上一至七,64(85).下一至六,31(42).下八,1.上一至六,31(42).下一至五,16(21).下七,1.上一至五,16(21).下一至四,7(10).下六,1.上一至四,7(10).下一至三,4(5).下五,1.上一、二、三,4(5).下一、

二,1(2).下四,1.上一、二,1(2).下一,1.下三,1.上1,1.下一、二共操作256(341)步.

由于九连环机构特征,“自古华山只一道”无他路可走,256(341)是准确数.因此上引《清稗类钞》所录81次是误导.又有说51次(北京《晨报》)也不确.

3.2 计数函数

从上拟《解环谱》可见从“满贯”到“解脱”,二连环至九连环所操作步数,因受上、下环充分必要条件制约,有相同规律.先从“机构计数”说起.以 j_n 指 n 连环解环共需要操作的步数,则有

$$j_1 = 1, \qquad j_2 = 1,$$
$$j_3 = 2 + 1 + 1 = 2 + 2 = 4,$$
$$j_4 = 2 \times 2 + 3 = 7,$$
$$j_5 = (4 + 2) \times 2 + 4 = 16,$$
$$j_6 = (7 + 4 + 2) \times 2 + 5 = 31,$$
$$j_7 = (16 + 7 + 4 + 2) \times 2 + 6 = (2^4 + 2^3 - 1 + 2^2 + 2) \times 2 + 6 = (2^4 + 2^3 + 2^2 + 2) \times 2 - 1 + 6 = 64,$$
$$j_8 = (31 + 16 + 7 + 4 + 2) \times 2 + 7 = (2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2) \times 2 + 7 = 127,$$
$$j_9 = (64 + 31 + 16 + 7 + 4 + 2) \times 2 + 8 = (2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2) \times 2 - 2 \times 1 + 8 = 256.$$

从这个共同遵守的规律就不难推测 $n(n \geqslant 4)$ 连环解环操作步数计数函数是

$$j_n = (2^{n-3} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2) \times 2 - 2\left[\frac{n-4}{2}\right] + n - 1 = 2^2 \sum_{i=1}^{n-3} 2^i - 2\left[\frac{n-4}{2}\right] + n - 1 = 2^2(2^{n-3} - 1) - 2\left[\frac{n-4}{2}\right] + n - 1, \tag{1}$$

其中 $[a]$ 表示 a 的最大整数部分.

如果“按环计数”,计数函数记为 J_n,只要把《解环谱》中的下一、二或上一、二都视为2步,再把 n 化为二进制,以2的幂和表示,于是 n 连环解环,需操作步数(J_n)分别为

$$J_1 = 1, \qquad J_2 = 2,$$
$$J_3 = 2J_1 + 3 = 2^2 + 1 = 5,$$
$$J_4 = 2J_1 + 2J_2 + 4 = 2(2^2 + 1) = 10,$$
$$J_5 = 2(J_1 + J_2 + J_3) + 5 = 2^2(2^2 + 1) + 1 = 21,$$
$$J_6 = 2(J_1 + J_2 + J_3 + J_4) + 6 = 2[2^2(2^2 + 1) + 1] = 42,$$
$$J_7 = 2\sum_{i=1}^{5} J_i + 7 = 2^2[2^2(2^2 + 1) + 1] + 1 = 85,$$
$$J_8 = 2\sum_{i=1}^{6} J_i + 8 = 2\{2^2[2^2(2^2 + 1) + 1] + 1\} = 170,$$
$$J_7 = 2\sum_{i=1}^{7} J_i + 9 = 2^2\{2^2[2^2(2^2 + 1) + 1] + 1\} + 1 = 341.$$

据这些式子不难探索“按环计数”的 J_n 规律.当 n 是偶数时,有

$$J_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 2),$$

而当 n 是奇数时,有

$$J_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1).$$

综合说,连环“按环计数”函数是

$$J_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - 1 - \frac{(1 + (-1)^n)}{2}\right). \tag{2}$$

如果用二进制记数法来表示,则当 n 是奇数时,有

$$J_1 = 1,$$
$$J_3 = 2^2 + 1 = 101,$$
$$J_5 = 2^4 + 2^2 + 1 = 10101,$$
$$J_7 = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 1010101,$$
$$J_9 = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 101010101,$$

可以推测

$$J_n = \underbrace{101\cdots101}_{n\text{位}}. \tag{3}$$

而当 n 是偶数时,有

$$J_2 = 2,$$
$$J_4 = 2^3 + 2 = 1010,$$
$$J_6 = 2^5 + 2^3 + 2 = 101010,$$
$$J_8 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2 = 10101010,$$

可以推测

$$J_n = \underbrace{1010\cdots10}_{n\text{位}}. \tag{4}$$

4 九连环研究在西方

在16世纪之前九连环已传到欧洲,引起西方学者的浓厚兴趣,有很好研究成果.在16、17、19世纪各有研究的代表作.

三次方程求根公式的发明人 Cardan G,1550年在《置换术》(De Subulitate,book XV,2,Sponius edition,vol.3,P.587)中论述九连环,他用代数方法研究“按环计数”计数函数.

在牛顿以前对数学分析已卓著声誉的 Wallis J 1693 年在《代数学》(Algebra, Latin edition, Opera, vol. 2, chapter cxi, pp. 471-478) 评论九连环细节及其计数方法.

数论大师 Lucas F E A 多才多艺, 1891－1894 期间著四卷本《兴趣数学》(Recreation Mathematique, vol. 1, part 7) 以二进制方法讨论计数函数.

对照上文分析，可见三位西方学者的研究成果都有深入见解. 虽然说法、所用工具不同，却殊途同归，我们十分赞赏. 近人加拿大学者 Coxeter H M S 在他的名著《兴趣数学与论文》(Mathematcal Recreation and Essays, 1986 年已出第 14 版) 刊有 "中国环" 专节，评述 Cardan 和 Wallis 的成果. 因有经典意义，故介绍如下.

4.1　Cardan 的工作

一种名为中国环的玩具，是经过精心设计的，在英国玩具商品可以买到. 如图所示 (Coxeter 文所说图就是本文图 1a)，它是由一些圆环套在一根钗上，使圆环经钗端 A 从钗装上或卸下. 但是任意一个环可以装上或卸下，除非临近 (靠近 A) 一个环留在钗上，其余在 A 方向的所有圆环全部已卸下. 环的顺序已排定，不可更动. 第一、二两环则是例外，这两环可以同时装上，或卸下. 为了讨论方便，我假定每次只装上，或卸下一个环.

如果钗上有 n 个环，那么为了从钗上装上或卸下所有的环，需要上(下) $\frac{1}{3}(2^{n+1}-1)$ 步 (当 n 是奇数时) 或 $\frac{1}{3}(2^{n+1}-2)$ 步 (当 n 是奇数时).

证明　从钗上装，或卸一个环，称为 1 步. 从钗头 A 向左记环序数. 假设已卸去 m 个环，其余的留在钗上. 又假设要卸去后面那个环 (批第 $m+1$ 环) 共需操作 $x-1$ 步. 这就是说要卸去前面 $m+1$ 个环要操作 $x-1$ 步. 要操作这许多步后，才能卸去第 $m+2$ 个环. 因此从初始状态 (n 上环中，前面 m 个已卸去，其余在钗上) 直到卸去第 $m+1$，$m+2$ 个环共需操作 x 步.

假设已操作 x 步，因此前面 $m+2$ 个环已卸下，其余的环则留在钗上. 让我们进一步探索，卸下第 $m+3$，$m+4$ 两环一共要操作多少步 (这里的初始状态是前面 $m+2$ 个环已卸去，其余在钗上)？为卸下二者，我们先下第 $m+4$ 环，操作 1 步. 在卸下去第 $m+3$ 环之前，必须使第 $m+2$ 环在钗上，而所有前面 $m+1$ 个环都已卸下. 要做到这一点，必须：

(ⅰ) 装上第 $m+1$ 环，前面 m 个环已卸去，这要操作 $x-1$ 步 (前面 m 个环已卸去，要卸去第 $m+1$ 个环操作步数与前面 $m+1$ 个环已卸去，要装上第 $m+1$ 个环操作步数相等).

(ⅱ) 装上第 $m+2$ 环，需 1 步.

(ⅲ) 然后再卸下第 $m+1$ 环，又需操作 $x-1$ 步，共已操作 $2(x-1)+1$ 步.

然后要卸下第 $m+3$ 个环 (根据上下环充分必要条件，此时 $m+3$ 环已可以卸下)，1 步. 此时：前面 $m+1$ 个环都已卸下，挂在第 $m+2$ 个环上，第 $m+3$，$m+4$ 两环已卸下，这就必须：

(ⅰ) 上第 $m+1$ 环，卸下所有前面 m 个环，需要操作 $x-1$ 步.

(ⅱ) 下第 $m+2$ 环，1 步.

(ⅲ) 下第 $m+1$ 环，需 $x-1$ 步，全过程又共已操作 $2(x-1)+1$ 步.

因此，如果前面 m 个环已卸下，要卸下第 $m+1$，$m+2$ 环共需操作 x 步，那么，再要卸下后面两环，即第 $m+3$，$m+4$ 环，共要操作的步数为

$$1+[2(x-1)+1]+1+[2(x-1)+1]=4x.$$

当钗上有奇数个环时：卸下第 1 环要操作 1 步，那么要卸下前面 3 个环要增加 4 步，而要卸去前面 5 个环，还要增添 4^2 步. 按照这样计数方法，要卸下前面 $2n+1$ 个环，一共需要操作的步数为

$$1+4+4^2+\cdots+4^n=\frac{1}{3}(2^{2n+2}-1).$$

当钗上有偶数个环时，用同样计数方法：卸下第 1、2 环要操作 2 步，要卸下前面 4 个环要增添 2×4 步，要卸下前面 6 个环，还要增添 2×4^2 步，那么要卸下前面 $2n$ 个环，一共要操作的步数为

$$2+(2\times 4)+\cdots+(2\times 4^{n-1})=\frac{1}{3}(2^{2n+1}-2).$$

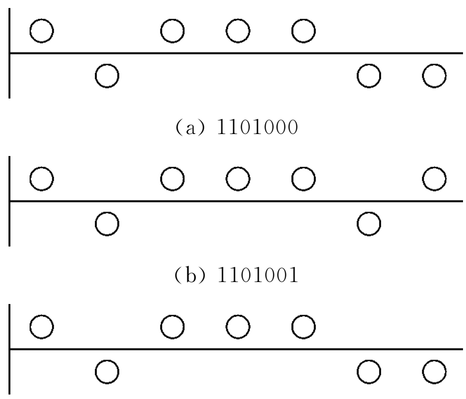
显然 Cardan 推导所得式(5)(6) 与前文"按环计数" 所得式(2) 等价. 有趣的是，Cardan 也考虑到九连环机构特性，还讨论到"机构计数" 问题，他说：如果我们把前面二环上下视为 1 步，那么式(5)(6) 应分别为 2^{2n}，$2^{2n-1}-1$. 这又与我们分析的式(1) 等价.

Coxeter 在中国环这一专节中还详论 Lucas 的成果. 他指出这一成果很优美，但似有矫揉造作之嫌. 他还指出在 Lucas 之前已有一位名叫 Gros L 的学者，在 1872 年著成《解环理论》(There de Baguenodier) 把环相对于钗的位置用二进制表示.

他用示意图:如果环在钗上作小圆在直线段上方,反之,已下钗,用小圆在直线段下面. Coxeter 所作 Lucas 成果的讲述,我们也介绍如下.

4.2 Lucas 的工作

图 7a 表示七连环中,前面二环已卸下,后继三环在钗上,第 6 环在钗上,而第 7 环在钗上. 我们用二进制计数法来表示现在钗的相对位置:对在钗上的环,自左而右地交错记 1,0. 对于已卸下的环,按它的左侧相邻钗上的环记下相同的数字;左侧如果无环,就记 0,因此图 7a 位置就记 1101000. 图 7b 环的位置是从图 7a 上、下环的位置得来:把第 1 环装到钗上,我们记为 1101001. 图 7c 环的位置也是从图 7a 上、下环的位置得来:卸下第 4 环,记为 1100111.



(a) 1101000

(b) 1101001

(c) 1100111

图 7 Lucas 的研究

这是说,钗上环的位置都可以用二进制数表示. 又,凡是每装上一环,给出一种变化:1 变成 0,或 0 变成 1,每卸下一个环,给出一次连码影响所及,每上一环或每下一环,使二进位数减去 1,或加上 1. 例如在图 7b 中表示各环位置的数是把环 1 从卸下到装上得到. 而把图 7c 中表示各环位置的数是从图 7a 把环 4 从装上到卸下得到. 钗上七个环全部已卸下,对应的数是 0000000. 满贯状态是 1010101. 因此从一种位置变到另一种位置,需要操作的步数等于二者所示二进位数之差.

对于七连环来说对应解脱是 0,对应满贯是

$$2^6+2^4+2^2+1=85,$$

即从满贯状态变为解脱,要操作 85 步. 用同样的方法推测,可知要卸下 $2n+1$ 个环要操作的步数为

$$1+2^2+\cdots+2^{2n}=\frac{1}{3}(2^{n+2}-1),$$

而要卸下 $2n$ 个环要操作的步数为

$$2+2^3+\cdots+2^{2n-1}=\frac{1}{3}(2^{2n+1}-2).$$

与上文公式(2)(3)(4)相对照,可见它们是等价的.

今作一表表示五连环卸去前面四环的步骤(图 8). 中间表示这些环一个接连一个被卸去的连续过程. 右边的数表示每一种位置从上一位置所对应的数加上 1 得到. 用括弧联系可以合并为一步的两步("一步"指"机构计数","两步"指"按环计数"),那么只要操作 7 步就可完成,操作 10 步不是必要的.

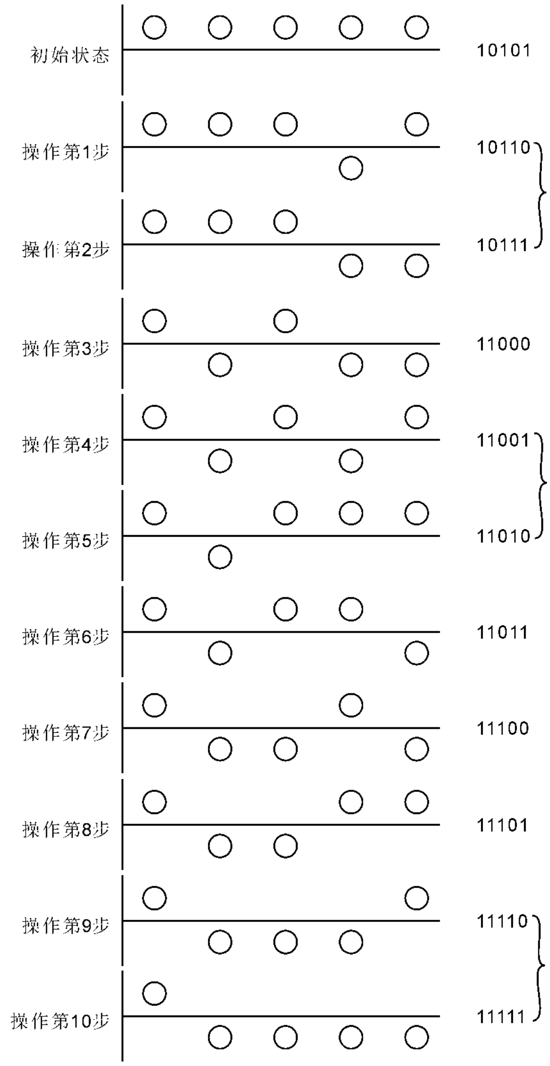


图 8 五连环卸去前面四环的步骤

可见 Goos 和 Lucas 都深入研究了九连环,而且同样用两种方法计算操作步数:"机构计数"和"按环计数".

参考文献

[1] Rouse W W, Coxeter H S M. Mathematical Recreations and Essays[M]. 13th ed. Dover: Dover Publ,1987:318-322.

[2] 关树东. 中国历史读本:战国策[M]. 长春:吉林人民出版社,1996:208.

[3] 杨世明,王雪琴. 数学发现的艺术[M]. 青岛:青岛海洋

大学出版社，1998：416-419.
[4] 唐圭璋. 全宋词：第 2 册[M]. 北京：中华书局，1965：769-776.
[5] 杨慎. 升庵全集[M]. 四库全书本. 北京：商务印书馆，1955：675.
[6] 吴文俊. 中国数学史大系：第 8 卷[M]. 北京：北京师范大学出版社，2000：120.
[7] 徐珂. 清稗类钞：物品类[M]. 北京：中华书局. 1986：243.
[8] 谈祥柏. 趣味数学辞典[M]. 上海：上海辞书出版社，1994：450-451.
[9] 姜长英. 移棋相向[M]. 北京：中国科技公司，1948：97-98.
[10] Needham J. Civilization and Science in China[M]. Cambridge：Cambridge Press，1959：111.
[11] 日本学士院. 明治前日本数学史[M]. 东京：岩波书店，1959：153.
[12] 周伟中. 巧解九连环[M]. 北京：金盾出版社，2003：11.

A Chinese Intelligence Toy：The Ring of Linked Rings

SHEN Kangshen
(Department of Mathematics，Zhejiang University，Hangzhou 310027，PRC)

Abstract： The Chinese intelligence toy Ring of Linked Rings was invented before the Qin Dynasty (B. C. 221). This paper intends to show its structure and operation，its history，the sufficient and necessary conditions for disjointing the rings and it's counting function. The paper also presents research results by G. Cardan (1501－1576)，J. Wallis (1616－1703) and F. E. A. Lucas (1842－1891)，and comments that their researches are successful.

Keywords： the ring of linked rings，the sufficient and necessary conditions for disjointing the rings，counting function

(上接第 55 页)

一题多证[2-3]能够使学生开阔视野，巩固知识，对培养学生多角度分析、解决问题的能力，激发学生灵感、培养创新意识，提高学生学习兴趣有着重要作用，这对于高等数学教学中方式方法的选择也是一个重要启示. 在讨论习题时，一题多解是拓宽学生思维、培养学生从不同的角度思考问题的重要途径，是开发智力、培养能力的有效方法，因此，在高等数学的教学过程中，通过多种解法的探讨，可以促使学生展开思维，广泛联想，同时也有利于学生对基础知识、基本方法的掌握；通过对各种方法的比较，增强学生的求简意识、优化意识，对培养学生思维的发散性、广阔性和灵活性都是十分有益的.

参考文献

[1] 同济大学数学系. 高等数学：上册[M]. 6 版. 北京：高等教育出版社，2007：128-154.
[2] 周占杰. 一个积分题的多种解法[J]. 辽宁师专学报，2006 (03)：118.
[3] 封希媛. 一例概率题的一题多解[J]. 青海大学学报，2006 (01)：97.

Effect of a Problem with Multiple Proofs in Higher Mathematics Teaching

LI Xin
(Department of Mathematics and Information Scientific，Zhengzhou University of Light Industry，Zhengzhou 450002，PRC)

Abstract： Multiple proofs for a typical inequality are presented and analyzed. With this example，we discuss how to display a problem fully so that it can be sufficiently inspiriting and reviewing，and therefore improving the teaching quality and the effect of exercise class.

Keywords： inequality，proof，teaching methods