



掂谈数学选修课“九连环”教学

浙江省湖州市第二中学 313000 俞 昕

近年浙江省高中数学优质课评比别出心裁,全部课题选自于教材中的“阅读与思考”栏目,执教教师向我们展示了一堂堂精彩的选修课程教学.下面笔者以“九连环中的数学”为例谈谈数学选修课程的教学.

1 教学设计简介

1.1 教学目标

基本目标

知识技能方面:(1)理解用化归、递归、类比、函数等思想解决九连环计数问题的方法;(2)能在具体问题情景中发现数列的递推关系.

过程方法方面:(1)经历动手操作、探索规则、提出问题、建立模型、解决问题、方法应用的学习过程;(2)体会求解过程中的化归、递归、类比、函数、归纳等思想方法.

情感态度价值观:(1)通过了解九连环的历史,让学生感受到我国古代数学成就,激发学生的民族自豪感;(2)通过学生课前、课内、课后自主、合作探究的学习方式,培养学生问题意识,提高学生思维能力,孕育学生创新精神;(3)通过九连环计数数列使学生感受到数列是反映现实生活的数学模型,体会数学源于实践并应用于实践.

发展目标

(1)掌握通过递推公式求解通项公式的基本方法;(2)了解九连环与格雷码的关系.

1.2 教学过程简介

整个教学过程包括:介绍历史,引入新课;认识连环,提出问题;探究规律,解决问题;应用新知,解新问题;反思解法,提新问题;妙用连环,变化无穷;交流收获,分享无限.其中主要环节是:认识连环,提出问题;探究规律,解决问题;应用新知,解新问题.

认识连环,提出问题 (1)介绍九连环的结构.(2)归纳解环规则.课前进行学情调查,发现班级里只有少数学生精通九连环,大部分学生对其知之甚少,因此让学生在课前进行小组合作,探究解环规则,在课内进行交流:要想下/上第 n 个环($n > 2$),必须满足两个条件:①第 $n - 1$ 个环在环柄上;②前 $n - 2$ 个环全不在环柄上.(3)描述连环状态.教师提示学生运用数学中的“二进制”表示连环状态:在柄上记为 1,在柄下记为 0.(4)明确任务,提出问题.教师向学生明确任务:解九连环就是将九连环从满贯状态 111111111 变到零状态 000000000.教师提问:在这个过程当中有什么数学问题?解九连环(从满贯状态到零状态)最少需要多少步?

探究规律,解决问题 (1)讨论解决方案.(2)解三连环、四连环.(3)解五连环比赛,分享经验.让学生以小组为单位解五连环.操作:将五连环从“满贯状态”变成“零状态”.记录:五连环经过哪些变化状态?探究:上述变化过程中有什么规律?并请每个小组派代表上台比赛解五连环.(4)类比得解九连环过程.建立模型,解决问题.自主探究:如何将九连环从“满贯状态”变成“零状态”? $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1 (n > 2)$ $\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 2$ $\mu_3 = 5$ $\mu_4 = 10$, $a_5 = 21$ $\mu_6 = a_5 + 2a_4 + 1 = 42$ $\mu_7 = a_6 + 2a_5 + 1 = 85$, $a_8 = a_7 + 2a_6 + 1 = 170$ $\mu_9 = a_8 + 2a_7 + 1 = 341$,因此解九连环最少需要移动圆环 341 步.(5)回顾反思.回顾解决问题运用的思想方法:化归、递归、类比、函数、归纳.

应用新知,解新问题 (1)华生问题.上个世纪 70 年代早期,美国一家生产玩具的公司老板杰西华生提出这样一个问题:假设九连环的初始状态是只有最靠近柄把的一个环在柄上,其他所有的环都在柄下,问解开这个九连环最少需要多少步?请同桌讨论解决,并请一位学生上台展示他解决的成果.

2 课例分析

2.1 穿越古今的数学玩具

曾在北京召开的第 24 届世界数学家大会的主席吴文俊院士兴致勃勃地参观北京中国科技馆古典数学玩具展时,详细询问各种玩具体现的玩法和数学原理.对九连环等玩具表示极大兴趣.他连声说“太有意思了,高深的数学在这里变得如此简单有趣,太奇妙了!”他还说:“有人说,数学枯燥,其实数学并不枯燥,它是生动的、形象的、丰富多彩的.我们的祖先把玩具和数学结合起来,创造出数学玩具.使玩具有了数学的文化底蕴,使数学有了玩具的形象载体:珠联璧合,相得益彰,真是太好了!”本节课正是抓住了九连环是一种穿越古今、流行中外的数学玩具,让学生感受到我国古代数学成就,激发学生的民族自豪感.

但笔者认为通过九连环这一载体还可以继续让学生反思.比如执教教师将解九连环与二进制联系起来,又与格雷码联系起来,由此可以再做一些文章.令人惊奇的是,如果我们把九连环的解环过程调整为每次只改变一个环,即 1、2 号环不同时上、下,则九连环的解环过程用二进制数表达出来就是格雷码.把九连环从状态 000000000 变到状态 111111111,再变到状态 100000000,就恰好得出整个九位格雷码.因此人们自然作出这样的猜测:格雷码是受九连环解法的启发而得出的.九连环传到西方已有几百年,作为数学家,格雷很可能读过有关



九连环的著作,因此这一猜测是很合理的.包括国外的很多数学家将九连环中的数学上升为数学理论.由此看到,我们的祖先不乏天才的创见,却不能将其上升到理论,后一工作往往由西方学者来实现.更令人感到叹息的是,像九连环这类具有卓越教育功能的宝贵遗产,在当代中国已经难觅踪迹了.希望我们的学生也能由此反思数学学习.

2.2 读书百遍其义自见

课前阅读往往被数学教学冷落,而在知识拓展类的数学选修课中课前阅读显得尤为重要.因为《九连环》阅读材料内容丰富,在一节课内想面面俱到是不可能完成的任务,所以课前阅读成了顺利完成本节课教学任务的焦点.执教教师让学生在课前进行小组合作,探究解环规则,在课内进行交流.其次解三连环与四连环在课前已经可以解决,并且学生已经在课前思考如何解五连环甚至更多的连环.这样教师就可以在课堂上顺利引导学生思考解环过程中蕴涵的数学思想,将其提升为数列问题加以解决.

课前阅读可以看做是翻转课堂教学模式的一种最简单的探索与尝试.翻转课堂(Flipped Classroom 或 Inverted Classroom)是首先由教师创建教学视频,学生在家或课外观看视频讲解,然后再回到课堂中进行师生、生生间面对面的分享、交流学习成果与心得的教学形态.教学视频的制作是需要教师具有一定的信息技术基础的,这需要经过系统的培训,但在正式实施翻转课堂模式之前我们可以渗透这种理念与模式,课前阅读就是一种可行的尝试.

2.3 体验“玩好数学,数学好玩”的真谛

“数学好玩”曾经是数学家陈省身先生对数学的赞美.九连环是我国的一种传统智力玩具,与七巧板、华容道并称为我国古代三大智力玩具.在本节课上,执教教师让学生现场表演解五连环,并且进行比赛,引起学生很大的兴趣.对于最后的获胜者大家都给予热烈的掌声.这说明学生对九连环这样的智力玩具非常感兴趣,这种兴趣随着教师揭开覆盖在九连环身上的数学面纱的同时自然的上升为对数学探究的好奇心与兴趣心.在课堂尾声,执教教师给学生们推荐了几本书《九连环图谱》、《巧解九连环》等,以供有兴趣的学生继续探究.

这种“在玩中学数学”的教学模式正是目前数学教学所缺少的,因此,笔者觉得不妨以“九连环中的数学”为蓝本开发知识拓展类的数学选修课程是颇有价值的.九连环在其上千年的发展中,产生了许多许多的变种,形成了“连环类玩具”.我国研究和收藏连环类玩具的专家周伟中先生指出:连环类玩具的种类至少在 1000 种以上.他本人收藏的就达 600 余种.连环类玩具有三大特点:一是挑战性,任何一种连环的解法都具有较高的难度,有的难度极高,甚至令人觉得根本不可能解开.二是趣味性,人们对智力玩具具有天生的爱好,都想探索它、

研究它、发现其中的奥妙.三是规律性,智力玩具都有其内在的规律,连环类玩具的规律性则特别强,必须按照特定的程序,有条不紊地操作,才能最终解开.而数学知识就往往蕴涵于其中,需要我们在“玩中去发现规律”.

2.4 体现选修课程发展学生个性的特点

在本节课上,执教教师还设置了两个环节“反思解法,提新问题;妙用连环,变化无穷”,以体现让不同的学生得到不同的发展.在“反思解法,提新问题”环节,教师提出“九连环与格雷码的关系”,学生自主提出“求通项公式”,反映了不同学生对探究问题的渴求,完善他们的认知结构.在“妙用连环,变化无穷”环节,教师向学生介绍了九连环能运用到锁具中,还能运用到魔术的逃生术中等等,以激发学生课后对九连环的继续探索.

选修课程的一个重要特点就是发展学生的个性,发掘学生的优势智能.加德纳论证了人类智能的多元存在性,除语言智能、逻辑—数学智能外,至少还存在其他六种以上的智能.关注个体差异,让不同学习水平和不同学习风格的学生得到有差异的发展.对逻辑—数学智能弱的学生,要发现他们其他的优势智能,鼓励他们主动参与数学学习活动,尝试着用自己的方式去解决问题、发表自己的看法,并及时肯定他们的点滴进步,从而增强学习数学的兴趣和信心;对学有余力并对数学有浓厚兴趣的学生,教师应为他们提供足够的学习材料,满足他们学习的需求,促进数学智能与其他智能的全面发展.本节课在这方面确实向我们作了一个很好的示范,从简单的三连环、四连环到五连环,再到九连环得到递推关系,层层递进,满足了不同智能的学生的数学需求.

2.5 小组合作与自主探究的合理分配

小组合作与自主探究是数学教学中两种重要的教学模式,如何有效地在课堂教学中把握好两者的关系以及合理的运用,使之发挥应有的作用是值得我们研究的.本节课在课前就进行分组合作,让熟悉九连环的学生带领、帮助不熟悉九连环的学生认识九连环.在课内,执教教师让学生以小组合作的方式解五连环,这样便于不同熟练程度的学生继续进行相互帮助.而探究九连环中数列的递推关系和华生问题,教师让学生自主探究(或仅同桌之间讨论)给出探究结果,留给学生独立思考的机会与时间.

根据数学学习任务的特点,不同内容适合不同的学习方式.在学生最近发展区内的内容尽量让学生自主探究,培养学生的数学探究能力.若难度较大,需要集体合力才能完成的探究任务则可以进行小组合作活动,要注意组内异质,组间同质.小组合作学习中也要渗透自主探究,每个学生都要参与其中,学生个体不能完全依赖他人,不能在学习的过程中因为困难、思维惰性而甘愿当听众.要敢于提出各自的想法,相互交流,在批判、争论、修正、达成一致的过程中做出判断、推理并得出结论.