

数学文化教学案例*

——神奇的九连环

庞志雷(青海师范大学附属中学)

摘要:在九连环的教学过程中,创设与学生认知水平相统一的教学情境,引导学生了解数学文化、开阔数学视野、发展数学能力,从而将数学核心素养的培养内化于心,外塑于形。

关键词:九连环;数学文化;数列;格雷码

文章编号:1002-2171(2019)4-0008-04

《普通高中数学课程标准(2017年版)》中明确指出:“数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点,以及它们的形成和发展,还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义,以及和数学相关的人类活动。”^[1]

教材中的数学文化内容大致可分为三类,即数学史、数学与科学技术、数学与现实生活。“九连环”是人教A版《数学5》(必修)第59页“阅读与思考”栏目中的内容。作为中国古代传统智力玩具,九连环肇源甚古,文献记载可以上溯到春秋战国时期,在之后漫长的岁月中,九连环代代相传。九连环因其解环的神秘性和挑战性,在古今中外拥有无数的爱好者。

高中数学课程关注数学的文化价值,并在教学内容中提出了对“数学文化”的学习要求,与之相关的研究方兴未艾。教材中九连环的内容比较简略,如何将教材中数学内容的文化形态转化为教育形态,是本教学案例试图探索和努力实践的方向。

1 教学内容分析与学情分析

1.1 教学内容分析

高中数学教学中开展数学文化教育,其根本目的是为了培养学生的学习兴趣,提升学生的学习能力,发展学生的数学核心素养。基于此,我们将本节课的内容设置如下:

(1)通过收集相关的学习资料,研究九连环的源流、结构和玩法,感受中国传统文化,培养自主探究的能力;

(2)根据九连环的解环特点,建立数学模型,推导“ n 连环”解法步数的递推公式;

(3)通过数学运算,推导“ n 连环”解法步数的通项公式;

(4)了解九连环解环步数与二进制格雷码之间的关系。

1.2 学情分析

本节课的教学对象为高一年级学生,他们通过“数列”相关内容的学习,掌握了“数列”的基础知识和求解“数列”通项公式的基本方法。学生具备一定的自主学习能力,能够针对一些简单的数学问题开展学习与讨论,并基本具备发现问题、提出问题、解决问题的能力。

1.3 教学目标

(1)了解九连环的构造,能够熟练地解开九连环;

(2)在解九连环的过程中,推导“ n 连环”解法步数的递推公式;通过小组合作学习,探究“ n 连环”解法步数所对应数列的通项公式;

(3)了解九连环解环步数与二进制格雷码之间的关系。

2 教学过程

2.1 感受文化,实际操作

观看微视频《神奇的九连环》。微视频从“战国策·齐策·齐闵王之遇杀”这一章的玉连环故事引入,介绍了九连环在国内外的流传、九连环的构造和

*基金项目:教育部“西部教学改革活动”青海省重点项目“基于深度学习落实学科核心素养的数学单元教学实践研究”,课题编号:QXM17ZD02。

操作技法、九连环与数学。

学生活动:请简述九连环的构造及解法并解开九连环。

小组展示 1:如图 1,九连环由柄把、环柄、九个圆环,环杆,环杆板等组成。

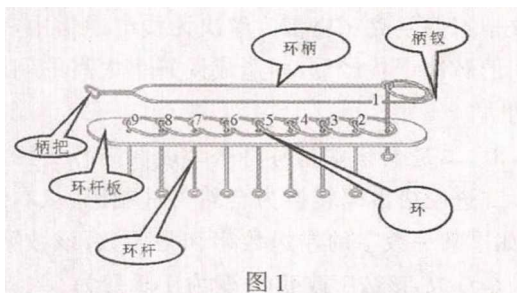


图 1

小组展示 2:解九连环。学生最快需 4 分 02 秒就能解开九连环,大多数学生能在 7 分钟以内完成解环。

设计意图:解九连环的过程可以激发学生的学习兴趣,体验发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的过程,汲取前人的经验和智慧,提升探究解决问题的能力,培养锲而不舍的钻研精神和科学态度。

2.2 情境引入,“华生问题”

二十世纪七十年代早期,美国加州一位生产玩具的老板杰本·华生(Jesse R. Watson)提出了这样一个问题:假设前 8 个环都已经解下,只剩第 9 个环在柄上,问解开这个九连环需要多少步?(如图 2)

问题引导 1:如果每次只能上或者下一个环,图 2 和图 3 中哪一种情况解开九连环需要的步数更多?各需要多少步?

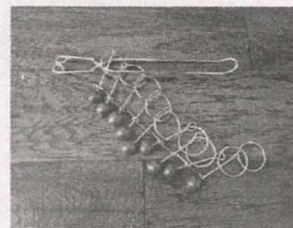


图 2

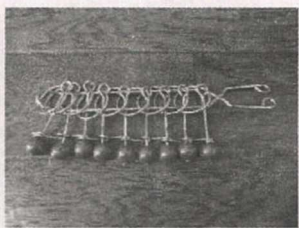


图 3

解“一连环”需要移动的步数为 1 次,记 $a_1=1$ 。

解“二连环”,先把第 2 环解下,然后再解下第 1 环即可,需要移动的步数为 2 次,记 $a_2=2$ 。

解“三连环”需要移动的步数为 $a_3=1+1+1+a_2=5$ 。

解“四连环”需要移动的步数为 $a_4=a_2+1+a_2+a_3=2a_2+a_3+1=10$ 。

依次类推,得到 $a_5=21, a_6=42, a_7=85, a_8=170, a_9=341$ 。

问题引导 2:如果每次只能上一个环或下一个环,那么解“ n 连环”需要移动的步数为 a_n ,则数列

$\{a_n\}$ 的递推公式是什么?

归纳类比得“ n 连环”($n \geq 3$)的解法可分为四步:第一步,先解前 $n-2$ 个环,需要移动 a_{n-2} 次;第二步,解下第 n 个环,需要移动 1 次;第三步,套上前 $n-2$ 个环,需要移动 a_{n-2} 次;第四步,解下前 $n-1$ 个环,需要移动的步数为 a_{n-1} 次。于是,解“ n 连环”需要移动的步数为 $a_n=2a_{n-2}+a_{n-1}+1$ ($n \geq 3$),其中 $a_1=1, a_2=2, a_3=5$ 。

问题引导 3:能否根据数列 $\{a_n\}$ 的递推公式,求出其通项公式?

解:
$$\left. \begin{aligned} a_n &= 2a_{n-2} + a_{n-1} + 1 \\ a_{n-1} &= 2a_{n-3} + a_{n-2} + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 2a_{n-2} + a_{n-1} - 2a_{n-3} - a_{n-2}$$

即 $a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-3})$ 。

设 $b_n = a_n - a_{n-2}$,则数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为公比, $b_3 = 4$ 的等比数列, $b_n = b_3 \times 2^{n-3} = 4 \times 2^{n-3} = 2^{n-1}$,即 $a_n - a_{n-2} = 2^{n-1}$ 。

$$\left. \begin{aligned} a_3 - a_1 &= 2^2, \\ a_5 - a_3 &= 2^4, \\ \text{当 } n \text{ 为奇数时, } a_7 - a_5 &= 2^6, \\ \dots \\ a_n - a_{n-2} &= 2^{n-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n - a_1 = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{n-1}$$

所以 $a_n = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1-4^{\frac{n+1}{2}}}{1-4} = \frac{2^{n+1}-1}{3}$ 。

$$\left. \begin{aligned} a_4 - a_2 &= 2^3, \\ a_6 - a_4 &= 2^5, \\ \text{当 } n \text{ 为偶数时, } a_8 - a_6 &= 2^7, \\ \dots \\ a_n - a_{n-2} &= 2^{n-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n - a_2 = 2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{n-1}$$

所以 $a_n = 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{n-1} = \frac{2(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4} = \frac{2^{n+1}-2}{3}$ 。

即
$$a_n = \begin{cases} \frac{2^{n+1}-1}{3} & (n \text{ 为奇数时}), \\ \frac{2^{n+1}-2}{3} & (n \text{ 为偶数时}). \end{cases}$$

问题引导 4:我们学会了解九连环,你能解开 33 连环吗?

学生:如果以 6 分钟解开九连环为例,360 秒完成 341 步,大约 1 秒钟完成 1 步。根据通项公式,解开 33 连环需要 5 726 623 061 秒,约 180 年。也就是说从出生开始,不眠不休,永不出错,大约需要三生三世才能解开(笑声)。

设计意图:数学概念、数学方法与数学思想的起源与发展都是自然生成的。教师引导学生运用机理分析法进行数学建模,通过对九连环基本结构的清晰认识,找出解环过程内部机理的数量关系,使用数列的相关知识探求数列 $\{a_n\}$ 的递推公式和通项公式。循序渐进的探究过程,使知识的生成自然而顺畅^[4]。

2.3 九连环与二进制

根据上面的学习,我们知道如果每次只上或下一个环,解开图3状态的九连环所需的最少步数为341步。但解开图2状态的九连环需要多少步呢?

2.3.1 九连环与二进制数

研究九连环的解环过程,我们发现每一个环只有在柄上或在柄下两种状态。如果我们用1表示环在柄上,0表示环在柄下,那么解环过程的每一种状态就对应着一个九位二进制数,所以解环的过程就可以用一系列二进制数来表示。图2环的状态可表示为100 000 000,图3环的状态可表示为111 111 111。

为了简单起见,我们先以五个环为例分析(如图4)。表1中左边起第1列的5位数是5个环的状态,依次由第1个环到第5个环,如11 000就表示第1个环和第2个环在柄上,其他三个环在柄下。第2列是将环的状态由二进制转换为十进制;第3列是从初始状态到这个状态所用的步数。

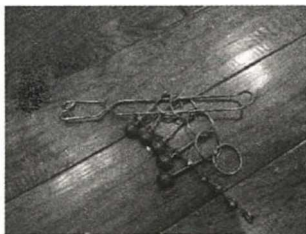


图4

表1 五连环状态表(二进制格雷码)

环的状态(二进制)	环的状态(十进制)	步数
00 000	0	0
00 001	1	1
00 011	3	2
00 010	2	3
00 110	6	4
00 111	7	5
00 101	5	6
00 100	4	7
01 100	12	8
01 101	13	9
01 111	15	10

由表1可知,将环的状态表示成的二进制数转换为十进制数之后,与相应的步数没有必然的关系。我们能否建立环的状态与相应步数之间的联系?

2.3.2 九连环与格雷码

格雷码又叫循环码或反射码,是美国贝尔试验室的数学家弗兰克·格雷为解决无线电通信中,由于线路间的脉冲干扰严重,而造成误码率太高的问题而发明的^[5]。

2.3.3 二进制格雷码与自然二进制码的互换

二进制格雷码转换为自然二进制码:从右到左检查,如果某一数字的左边数字和是偶数,该数字不变;如果是奇数,该数字改变(0变为1,1变为0)。如格雷码10 101表示为二进制数是11 001,简称奇变偶不变。

自然二进制码转换为二进制格雷码:将一个二进制数,从右到左检查,如果某一数字左边是0,该数字不变;如果是1,该数字改变。二进制数11 011的格雷码是10 110。

表2 五连环状态表(二进制格雷码与自然二进制码)

环的状态(二进制格雷码)	环的状态(十进制)	自然二进制码	自然二进制转换为十进制	步数
00 000	0	00 000	0	0
00 001	1	00 001	1	1
00 011	3	00 010	2	2
00 010	2	00 011	3	3
00 110	6	00 100	4	4
00 111	7	00 101	5	5
00 101	5	00 110	6	6
00 100	4	00 111	7	7
01 100	12	01 000	8	8
01 101	13	01 001	9	9
01 111	15	01 010	10	10
01 110	14	01 011	11	11
01 010	10	01 100	12	12
01 011	11	01 101	13	13
01 001	9	01 110	14	14
01 000	8	01 111	15	15
11 000	24	10 000	16	16
11 001	25	10 001	17	17
11 011	27	10 010	18	18

表 2(续)

环的状态 (二进制格雷码)	环的状态 (十进制)	自然二 进制码	自然二进制转 换为十进制	步数
11 010	26	10 011	19	19
11 110	30	10 100	20	20
11 111	32	10 101	21	21
11 101	0	10 110	22	22
11 100	1	10 111	23	23
10 100	3	11 000	24	24
10 101	2	11 001	25	25
10 111	6	11 010	26	26
10 110	7	11 011	27	27
10 010	5	11 100	28	28
10 011	4	11 101	29	29
10 001	12	11 110	30	30
10 000	13	11 111	31	31

我们发现,环的状态转换为自然二进制码后,其对应的十进制数与从初始状态到这个状态所用的步数完全吻合。对于只有 5 个环的五连环,从初始到状态 11 111 所需的步数并不是最多的,到状态 10 000 才是最多,共 31 步。

根据上面的研究,图 2 状态的环可表示为二进制格雷码 100 000 000,转换成自然二进制码 111 111 111,解环需 511 步;图 3 环状态的环可表示为二进制格雷码 111 111 111,转换成自然二进制码 101 010 101,解环需要 341 步。多出的 170 步恰好是解八连环所需的步数。

设计意图:通过了解九连环和格雷码之间的关系,既拓宽了学生的数学视野,又呈现了数学内容、渗透了数学方法、浸润了数学文化,从而提升了学生的学习兴趣,锻炼了学生的学习品质,进一步深化了学生对数学学科的认识。

2.4 小结

今天我们一起研究了九连环,探究解“ n 连环”需要移动步数的递推公式和通项公式,了解了九连环与格雷码之间的神奇联系。吴文俊院士研究了九连环的玩法和数学原理后说:“数学是生动的、形象的、丰富多彩的。我们的祖先把玩具和数学结合起来,创造出数学玩具。使玩具有了数学的文化底蕴,使数学有了玩具的形象载体,珠联璧合,相得益彰。”

3 教学反思

教材中的“阅读材料”既是教材内容的有机组成部分,又是对教材内容的补充和延伸。本节课从九连环入手,引导学生了解数学文化、开阔数学视野、发展数学能力。笔者认为,数学文化课的教学应注意以下几点。

3.1 数学文化的内容与学生的认知结构相统一

数学文化的内容应符合学生的年龄特征和认知水平,具有趣味性、科学性、有效性和新颖性等特点。创设与学生认知水平相统一的教学情境,在教学过程中逐步揭示数学的文化意义。学生在感知与学习数学文化的过程中,感受到数学不仅有冷冰冰的表述和推理,知识的背后还蕴含着丰富的数学文化。数学教学中不应仅有“冰冷的美丽”,更应该有“火热的思考”,从而让学生在思考的过程中真正感受数学的无限魅力。

3.2 数学文化的融入与核心素养的培养相统一

数学学科的发展受到来自内部和外部的文化的影响:一方面,数学的思想、精神、方法和观点,对人类文明发展与进步的历程起着不可替代的作用;另一方面,数学又从其他文化的发展中汲取各种营养成分。从这个意义上说,数学教育就是数学文化的教育。中学数学教学中开展数学文化教育,目的就是为了让学生会用数学的眼光观察世界、用数学的思维探索世界、用数学的语言表达世界,从而真正将数学核心素养的培养内化于心,外塑于形。

3.3 数学文化的渗透与教材的育人功能相统一

数学文化内容具有可读性、趣味性、教育性、实用性的特点。通过对数学文化课的深入学习和学习,学生能初步了解数学与现实生活的关系,感受到优秀文化的熏陶,领会数学的理性精神,开阔视野,提升对数学的宏观认识和整体把握,感知数学的科学价值、应用价值和人文价值,提升综合文化素养,真正落实数学教育立德树人的根本任务。

参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中课程标准(2017年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2018.
 [2] 沈康身. 智力玩具九连环研究[J]. 高等数学研究,2012,15(05):56-63.
 [3] [英]劳斯·鲍尔,[加拿大]H. S. M. 考克斯特. 数学游戏与欣赏[M]. 杨应辰,等,译. 上海:上海教育出版社,2015.
 [4] 孙宏安. 谈数学建模[J]. 中学数学教学参考(上旬),2018(4):2-6,17.
 [5] 吴鹤龄. 七巧板、九连环和华容道[M]. 北京:科学出版社,2018.