必修 5 中的两个有趣的数列

福建省泉州市石狮八中　362700　连毅端

在必修 5 的数列部分中,课后的“阅读与思考”涉及到两个数列: 斐波那契数列与九连环数列,其中斐波那契数列的通项公式的求解没有给出,而有关九连环的数列的通项公式的求解过程很多学生反映不好理解,介于此,本文重点就如何求两个有趣数列的通项公式,以飨读者.

首先我们来看如何求斐波那契数列的通项公式 a_n,这里介绍两个方法: 待定系数法与特征方程法.

已知斐波那契数列$\{a_n\}$满足 $a_1=a_2=1$,$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,求 a_n.

解法一　待定系数法

解　由 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$,得 $a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$,

令$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1-\sqrt5}{2}\\ \beta=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\end{cases}$

从而 $a_{n+2}-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\left(a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_n\right)$,

即 $\dfrac{a_{n+2}-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_{n+1}}{a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_n}=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$.

所以 $\left\{a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_n\right\}$ 为等比数列,公比是 $\dfrac{1+\sqrt5}{2}$,首项 $=a_2-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_1=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$

所以 $a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_n=\dfrac{1+\sqrt5}{2}\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}$,

$a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt5}{2}a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}$,

$$\frac{a_{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}}-\frac{1-\sqrt5}{2}\cdot\frac{a_n}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}}=1.$$

$$\frac{a_{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}}-\frac{-3+\sqrt5}{2}\cdot\frac{a_n}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}}=1.$$

令 $b_n=\dfrac{a_n}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}}$,$b_{n+1}=\dfrac{\sqrt5-3}{2}b_n+1$.

利用待定系数法可知: $b_n=\dfrac{5-\sqrt5}{10}\left(\dfrac{\sqrt5-3}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{5+\sqrt5}{10}$,所以 $\dfrac{a_n}{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}}=\dfrac{5-\sqrt5}{10}\cdot\left(\dfrac{\sqrt5-3}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{5+\sqrt5}{10}$,经整理得: $a_n=\dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$.

解法 2　特征方程法

解　特征方程: $x^2-x-1=0$ 的特征根是 $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$.

设 $a_n=A_1\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}+A_2\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}$,

$\begin{cases}A_1+A_2=1,\\ A_1\cdot\dfrac{1+\sqrt5}{2}+A_2\cdot\dfrac{1-\sqrt5}{2}=1,\end{cases}$　得

$\begin{cases}A_1=\dfrac{1}{\sqrt5}\cdot\dfrac{1+\sqrt5}{2},\\ A_2=-\dfrac{1}{\sqrt5}\cdot\dfrac{1-\sqrt5}{2}.\end{cases}$

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt5}\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$.

通过求出的通项公式,我们会发现一个有趣的现象: 这样一个完全是自然数的数列,通项公式却是用无理数来表达的,这是用无理数表示有理数的一个范例,而与斐波那契数列相关的有趣内容读者可以网上查阅.

接下来再看如何求九连环数列的通项公式.

已知九连环数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_2=2$,$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+1(n\geqslant3)$,求 a_n

解　$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+1(n\geqslant3)$,

$a_n+a_{n-1}+1=2(a_{n-1}+a_{n-2}+1)$,

$\dfrac{a_n+a_{n-1}+1}{a_{n-1}+a_{n-2}+1}=2$,

所以数列$\{a_n+a_{n-1}+1\}$为等比数列,公比为 2,首项是 4.

$a_n+a_{n-1}+1=4\cdot2^{n-2}=2^n$,

$a_n+a_{n-1}=2^n-1$,　①

$a_{n+1}+a_n=2^{n+1}-1$.　②

由 ② − ①: $a_{n+1}-a_{n-1}=2^n$,

当 $n=2k$ 时，

$a_{2k+1}-a_{2k-1}=2^{2k}$，

$a_3-a_1=2^2$，

$a_5-a_3=2^4$，

$a_7-a_5=2^6$，

…

$a_{2k+1}-a_{2k-1}=2^{2k}$，

$a_{2k+1}-a_1=\dfrac{2^2-2^{2k}\cdot 2^2}{1-2^2}$，

$a_{2k+1}=\dfrac{2^{2k+2}-1}{3}$，

所以 $a_n=\dfrac{2^{n+1}-1}{3}$（n 为奇数）.

当 $n=2k+1$ 时，

$a_{2k+2}-a_{2k}=2^{2k+1}$，

$a_4-a_2=2^3$，

$a_6-a_4=2^5$，

…

$a_{2k+2}-a_{2k}=2^{2k+1}$，

所以 $a_{2k+2}-2=\dfrac{2^3-2^{2k+1}\cdot 2^2}{1-2^2}$，

$a_{2k+2}=\dfrac{2^{2k+3}-2}{3}$，

所以 $a_n=\dfrac{2^{n+1}-2}{3}$（n 为偶数），

所以 $a_n=\begin{cases}\dfrac{2^{n+1}-1}{3},(n\text{ 为奇数})\\ \dfrac{2^{n+1}-2}{3},(n\text{ 为偶数})\end{cases}$

从而 $a_9=\dfrac{1}{3}(2^{9+1}-1)=341$，即解九连环最少需要移动圆环341次.

通过课本的这两个例子，我们从中可以挖掘出很多有趣的内容，这些内容也是学生很感兴趣的，因此，课本的"阅读与思考"可以作为很好的课题让学生拓展知识面，值得每一个学生去探索.

作者简介　连毅端，男，福建泉州人，石狮市优秀教师.

函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调性及其应用

北京丰台二中　100071　甘志国（特级教师）

1　函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调性及其相应的结论

用导数可证得：

定理1　（1）函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e]$，$[e,+\infty)$ 上分别是增函数、减函数（其图象如图1所示）.

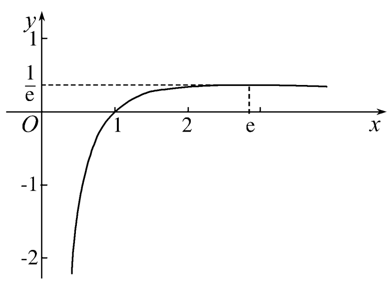

图1

（2）① 当 $0<a<b\leqslant e$ 时，$a^b<b^a$；

② 当 $e\leqslant a<b$ 时，$a^b>b^a$；

③ 当 $0<a\leqslant 1$ 且 $a<b$ 时，$a^b<b^a$；

④ 当 $1<a<e$ 且 $b>e$ 时，$a^b<b^a$，$a^b=b^a$，$a^b>b^a$ 均有可能.

2　定理1的应用

2.1　推广2014年高考湖北卷文科压轴题的结论

高考题1　（2014年高考湖北卷第22题）π 为圆周率，$e=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

（1）求函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调区间；

（2）（文）求 $e^3,3^e,e^\pi,\pi^e,3^\pi,\pi^3$ 这6个数中的最大数与最小数；

（理）将 $e^3,3^e,e^\pi,\pi^e,3^\pi,\pi^3$ 这6个数按从小到大的顺序排列，并证明你的结论.

下面给出这道高考题的解法.

解　（1）增区间为 $(0,e)$，减区间为 $(e,+\infty)$.

（2）（文）由（1）的结论还可证得结论：当 $e\leqslant a<b$ 时，$a^b>b^a$.

由此结论，得 $e^3>3^e$，$e^\pi>\pi^e$，$3^\pi>\pi^3$.

又由幂函数、指数函数的单调性，得 $3^\pi>e^\pi>e^3$，$\pi^3>\pi^e>3^e$.

所以所求最大数与最小数分别是 3^π，3^e.